Chapter 7 Markov Chains

Markov chain 을 알아보기 위해 다음과 같은 문제를 생각해본다.

Problem)

3 사람이 원탁에 앉아 있다. 각자 돈을 x_1, x_2, x_3 만큼 갖고 있다. 1 분마다 자신이 소유한 돈을 절반으로 나누어 양쪽 사람에게 나누어준다.
이 때, 충분한 시간이 흘렀을 때, 3 사람이 갖고 있는 돈을 각각 얼마인가?

시간 t 때, 각 사람들이 갖고 있는 금액을 X(t)라고 하자.
그렇다면, $\lim_{t\to\infty} X(t)$ 가 얼마가 되는지 구하면 된다.

시작 시간에 각자 갖고 있는 돈을 X(0)라고 하면,
$X(0) = (x_1, x_2, x_3)$ 이다.

그리고 1 분이 지났을 때는
$X(1) = (\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{x_1+x_3}{2}, \frac{x_1+x_2}{2})$ 이다.

$X(t) = X(t-1)*P = X(t-2)*P^2 = \ldots = X(0)*P^t$ 이다.

행렬 $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ 이므로, P 의 행렬을 여러 번 곱하면 된다.

하지만, 행렬 P 를 직접 여러 번 곱하는 것은 계산이 복잡하기 때문에 행렬 P 에 대하여 대각화를 해야한다.

행렬 대각화를 위해서는 행렬 P 에 대한 eigen value 와 eigen vector 를 구해야한다.
(eigen value 와 eigen vector 의 자세한 내용을 알려면 선형대수학을 참고한다.)

정방행렬(nxn) A 에 대해서

$$Av = \lambda v$$

를 만족하는 λ와 v를 각각 eigen value 와 eigen vector 라고 한다.
(eigen value 는 정수값이고, eigen vector 는 nx1 이다.)

예를 들어

$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

따라서 행렬 P 의 eigen value 는 1, eigen vector 는 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

행렬 P 의 eigen value 와 eigen vector 를 구하기 위해 다음 식을 정리하면,

$$Pv = \lambda v$$
$$(P - \lambda I)v = 0$$

이다.

그런데, eigen vector 의 특성 때문에, det $(P - \lambda I)$=0 이 되어야한다.
(eigen vector 는 존재하려면, 0 vector 가 될 수 없다.)

$$det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4}\lambda = -8\lambda^3 + 6\lambda + 2$$

$$= -2(\lambda - 1)(2\lambda + 1)^2$$
$$\lambda = 1\ or - \frac{1}{2}$$

eigen vector 를 구하기 위해

λ 에 각각 1 또는 $-\frac{1}{2}$ 를 넣으면,

eigen vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 을 얻을 수 있다.

그렇다면 P 는 다음과 같이 대각화를 할 수 있다.

(cf P = DND^{-1}, D 는 eigen vector 의 결합 행렬, N 은 eigen value 들의 대각행렬이다.)

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

t 가 충분히 클 때,

$$P^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

따라서,

X(t) = ($\frac{(x_1+x_2+x_3)}{3}, \frac{(x_1+x_2+x_3)}{3}, \frac{(x_1+x_2+x_3)}{3}$) 이다.