Chapter 2.2 The Bernoulli and Binomial Random Variables

어떤 실험을 하는데, p 의 확률로 성공하고 (1-p)의 확률로 실패한다고 가정하자.
그러면, Bernoulli random variable(Indicator random variable)을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$X = \begin{cases} 1, \text{실험이 성공한 경우} \\ 0, \text{실험이 실패한 경우} \end{cases}$$

Bernoulli 랜덤 변수의 특이한 점은 기대값과 변수의 값이 1 일 때가 서로 같다.

$$\mathrm{E[Y]} = p * 1 + (1-p) * 0 = p = \Pr(Y = 1)$$

위의 실험이 각각 독립적이고, N 번 수행한다고 가정하자. 그리고 변수 Y 을 N 번 실험 중 성공한 횟수라고 정의한다. 이 때, 변수 Y 는 binomial random variable 이라고 할 수 있다.

Definition 2.5

Binomial random variable 은 파라미터 n, p 와 함께 B(n,p)로 표현한다.

j=0, 1, 2 … n 에 대해서

$$\Pr(Y = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

(여기서, j 는 성공한 횟수를 의미한다.)

모든 확률 함수와 마찬가지로 Binomial 랜덤함수도 가능한 모든 j 의 확률을 다 더하면, 1 이 나와야 합니다. 이는 다음과 같이 증명할 수 있습니다.

Proof)
$\sum_{j=0}^{n} \Pr(Y = j) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$

이 때,

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$$

이므로

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

Binomial Random variable 의 기대값은 다음과 같이 구할 수 있다.

E[Y] = $\sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$

$\sum_{j=0}^{n} j \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}$

$\sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}$

$np * \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(j-1)!((n-1)-(j-1))!} p^{j-1} (1-p)^{(n-1)-(j-1)}$

$np * \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} p^k (1-p)^{m-k}$

np

이다.